



Praca poglądowa/Review paper

Metoda Monte Carlo i jej zastosowanie w radioterapii

The Monte Carlo method and using in radiotherapy

Natalia Matuszak¹

¹Zakład Radioterapii I, Wielkopolskie Centrum Onkologii, Poznań, Polska

Streszczenie

Głównym założeniem pracy jest teoretyczne ujęcie metody Monte Carlo - jej podstaw statystycznych i zastosowania w radioterapii. Ponieważ eksperymenty fizyczne nierzadko wiążą się z ograniczeniami technicznymi za alternatywne rozwiązanie warto przyjąć modelowanie komputerowe. Do celów radioterapii najczęściej wymienianą metodą jest tzw. metoda Monte Carlo. Rozwój wiedzy w zakresie fizyki jądrowej umożliwia wdrożenie do radioterapii rozwiązań dających możliwie jak najmniejsze ryzyko błędu.

Symulacje Monte Carlo służą modelowaniu procesów złożonych, dla których podejście analityczne jest wieloetapowe i czasochłonne. Istotą metody jest symulacja komputerowa procesów o charakterze losowym. Do opisu wielkości fizycznych, algorytm wykorzystuje obliczenia numeryczne.

Metoda Monte Carlo stwarza szereg możliwości w dziedzinie radioterapii, obrazowania medycznego i ochrony radiologicznej (obliczanie dawek pochodzenia zewnętrznego i wewnętrznego).

W radioterapii, kodem Monte Carlo o największym zastosowaniu jest GEANT4. Różnorodność kodów (np. EGSnrc, MCNP, Fluka) umożliwia prowadzenie symulacji dla różnych rodzajów cząstek (m.in. fotony, elektrony, neutrony) i różnych energii. (eV, GeV, TeV).

Abstract

The goal of this article is theoretical aspect of Monte Carlo method - statistical background and potential using in radiotherapy. Conducting an experiments regularly is crossed with technological restrictions so adequated approach is computer modeling. In radiotherapy the most often used method is Monte Carlo.

Adres do korespondencji

Natalia Matuszak

Pracownia Radiobiologii,

Wielkopolskie Centrum Onkologii, ul. Garbary 15, 61-866 Poznań, Polska

Telefon. +48 8850474

e-mail: natalia.matuszak@wco.pl

Development of nuclear physics knowledge enable implementation technology with the lowest as much as possible risk of error.

Monte Carlo simulations have in view modeling complex processes for which the analytical approach is multistage and time-absorbing. Idea is computer simulation of random process. For describing physical quantity is used algorithm based on numerical calculation.

Monte Carlo carry a wide range of opportunities in radiotherapy, medical imaging and radiation protection (calculate of external and internal dose exposure).

The largest application in radiation therapy is GEANT4 code. Based on different algorithms (MCNP, MCNPX, FLUKA, EGSnrc) conducting of simulation for various particles (photons, electrons, neutrons) and energy (eV, GeV, TeV) is workable.

Słowa kluczowe: Monte Carlo, symulacje, kod Geant4, widmo energetyczne.

Keywords: Monte Carlo, simulation, Geant4 code, energy spectrum.

Wstęp

Monte Carlo zaliczana jest do metod symulacyjnych. Celem jest odwzorowanie rzeczywistego procesu (np. napromienianie pacjenta w radioterapii) za pośrednictwem modeli fizycznych, matematycznych i analitycznych. Symulacje komputerowe są wsparciem w sytuacji, kiedy eksperyment nie stanowi kompletnego źródła informacji na temat analizowanego zjawiska jak również w przypadku braku możliwości na bezpośrednie przeprowadzenie eksperymentu. Twórcami metody są J. Neumann i S. Ulam [1].

Podstawy metody Monte Carlo

Metoda Monte Carlo powinna być realizowana według następującego planu:

- Sformułowanie problemu,
- Dobór odpowiedniego oprogramowania/kodu symulacji,
- Zbudowanie świata, w którym będą prowadzone symulacje,
- Uruchomienie modelu/ wizualizacja obiektów i zjawisk
- Wykonanie przebiegów symulacyjnych i analiza wyników
- Porównanie wyników z danymi eksperymentalnymi [2]

Narzędziem, jakim posługuje się symulacja komputerowa w realizacji celu badawczego jest program komputerowy. Jest to formalna reprezentacja modelu badanego systemu. Każda symulacja komputerowa związana jest ze środowiskiem programistycznym. W przypadku Monte Carlo jednym z najnowocześniejszych narzędzi symulacyjnych jest GEANT4 (ang. *Geometry and Tracking*), często upraszczany jako G4. (zgodnie z uwagą zdanie przeniesione z rozdziału Środowisko programistyczne - GEANT4) O doborze kodu symulacji decyduje obszar zastosowania symulacji jak również przedmiot prowadzonych symulacji (klasa cząstek, jakie chcemy symulować, ośrodek ich ruchu, zakres energii, rodzaj oddziaływań itd.).

Konstrukcja środowiska, w którym prowadzone są symulacje polega na zdefiniowaniu wszystkich składników tworzących symulowany „świat”. Symulowany „świat” stanowi główny obiekt, w którym umieszczone są wszystkie mniejsze elementy odzwierciedlające rzeczywiste warunki eksperymentu. Począwszy od określenia ich składu pierwiastkowego, właściwości fizycznych, stałych chemicznych do zdefiniowania wszystkich obiektów (akceleratora medycznego z wyodrębnieniem każdej części tj. kolimatora pierwotnego, filtra spłaszczającego, szczęk kolimacyjnych, osłon jak również detektorów i ośrodka, w którym rozchodzi się promieniowanie). Jeśli obiekty wypełnione są płynami, taki fakt również należy uwzględnić. Przykładem jest symulacja rozkładu dawki w wodzie, która jako ośrodek rozchodzenia się promieniowania jonizującego zgodnie z warunkami eksperymentalnymi musi być umieszczona w fantomie. Obiekty powinny

być opisane zgodnie z wymiarami rzeczywistymi gdyż symulacja ma stanowić odzwierciedlenie faktycznego stanu rzeczy i zjawisk.

Po wizualizacji obiektów należy rozpatrzeć zjawiska, jakie zachodzą w trakcie emisji promieniowania i oddziaływania z materią m.in. zjawisko fotoelektryczne, zjawisko Comptona, zjawisko tworzenia par. Taka wiedza pozwala na interpretacje cząstek pierwotnych symulacji.

Ważnym krokiem jest definicja w programie pierwszej symulowanej cząstki, która zainicjuje zjawiska oddziaływania promieniowania z materią. Następnie należy nadać jej kierunek ruchu i spodziewać się oddziaływania w wirtualnej przestrzeni.

Końcowym etapem symulacji jest statystyczna estymacja otrzymanych wyników. Przykładowo symulując widma energetyczne, na podstawie kształtu widm łatwo ocenić czy statystyka obliczeń jest wystarczająca. Co więcej, warto zweryfikować otrzymane wyniki z danymi doświadczalnymi. Model Monte Carlo sprawdza się jako metoda porównawcza dla eksperymentów fizycznych.

Stochastyczny charakter modelu

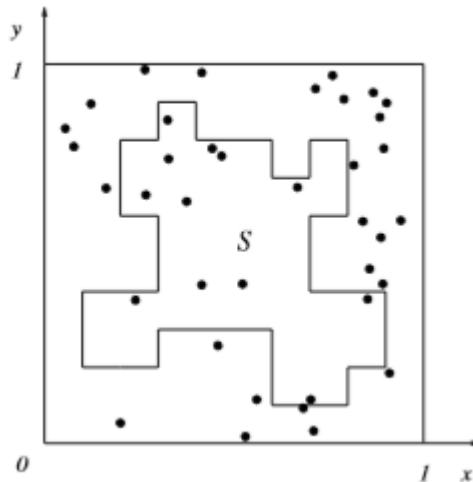
Symulacje Monte Carlo należą do symulacji stochastycznych, co czyni je prostym sposobem badania zjawisk losowych. Dla symulacji stochastycznych znany jest jedynie rozkład prawdopodobieństwa możliwych rezultatów. Każdy wynik ma jednakowe szanse na zaistnienie dlatego nie jest możliwe aby jednoznacznie wnioskować o wynikach [2].

Metoda Monte Carlo opiera się na gruncie statystyki i teorii prawdopodobieństwa stąd istotną rolę spełnia przypadkowe losowanie wielkości charakteryzujących proces. Strukturę symulacji Monte Carlo stanowią obliczenia numeryczne w oparciu o ciąg liczb losowych (liczb należących do pewnego zbioru wartości $\{r_1, \dots, r_n\}$ wybieranych z pewnym prawdopodobieństwem). Liczby losowe generowane są za pośrednictwem formuł matematycznych tzw. ziaren informacji (ang. *seed*).

Jednym z warunków, jakie muszą spełniać liczby losowe jest jednostajność. Oznacza to jednakowe prawdopodobieństwo, z jakim wybierane są liczby losowane z zakresu $\langle a, b \rangle$. Jeśli jako r może pojawić się każda z liczb zbioru z tym samym prawdopodobieństwem $p(r) = 1/n$, wówczas mówimy o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa liczb losowych z tego zbioru (Ryc.1). Przykładowo rozpatrując pole powierzchni figury płaskiej, losowo dobieramy N punktów rozmieszczonych we wnętrzu kwadratu i N_1 we wnętrzu figury S . Z geometrycznych uproszczeń wynika, że pole figury S można oszacować poprzez zależność N_1/N . Przykład na Ryc. 1 ukazuje 40 punktów, spośród których dwanaście znajduje się wewnątrz figury S zatem stosunek N_1/N wynosi 0,3 (dokładne pole figury S jest równe 0,35).

Metoda Monte Carlo ma dwie ważne zalety. Pierwsza to prosta struktura algorytmu. Zasadniczo tworzy się program realizacji jednego zdarzenia. Eksperyment powinien być niezależny od poprzedniego dlatego wykonuje się pewną liczbę niezależnych symulacji. Wyniki doświadczeń zostają uśrednione a uzyskana w ten sposób średnia – jeśli tylko liczba symulacji jest wystarczająco duża – traktowana jest jako wartość oczekiwana danej wielkości. Według definicji Petera Jeackela jest to „Metoda polegająca na wielokrotnym powtarzaniu pewnych procedur oraz sumowaniu indywidualnych wyników, w celu uzyskania przybliżonego rozwiązania problemu” [2].

Drugą cechą metody jest zbieżność obliczeń, proporcjonalna z reguły do $(D/N)^{-2}$, gdzie D oznacza pewną stałą, a N liczbę prób. Zgodnie z definicją aby 10-krotnie zmniejszyć błąd należy stukrotnie zwiększyć liczbę prób. Nie wpłynie to jednak na zwiększenie dokładności wyników ponieważ efektywność metody Monte Carlo uwidacznia się wobec problemów, dla których wynik znany jest z niewielką dokładnością [3-4].



Ryc. 1. Rozkład N i N_1 punktów losowo rozmieszczonych odpowiednio we wnętrzu i na zewnątrz figury [2].

Ciąg liczb losowych może cechować pewna regularność. Schemat symulacji tworzą w rzeczywistości liczby deterministyczne i odtwarzalne dlatego wprowadzono pojęcie liczb pseudolosowych (ang. *pseudorandom numbers*), których wartości imitują liczby losowe. Ze względu na algorytmiczny sposób generacji liczb, symulacje Monte Carlo prowadzone są w oparciu o liczby pseudolosowe. Ich znaczenie przejawia się w wyznaczeniu zasięgu i losu cząstki przez porównanie prawdopodobieństwa oddziaływań w modelowanej geometrii.

Wiele zastosowań z zakresu symulacji, w tym symulacje stochastyczne, wymaga użycia odpowiednich narzędzi zwanych generatorami liczb pseudolosowych (ang. *Pseudo-Random Number Generator – PRNG*). Do najważniejszych własności generatorów liczb pseudolosowych należą:

- powtarzalność

Podanie tego samego ziarna skutkuje wygenerowaniem takiej samej sekwencji liczb. Powtarzalność jest cechą pożądaną, pozwala odtworzyć przebieg działania programu w razie wystąpienia błędu.

- losowość

Wzorcowy generator liczb pseudolosowych winien generować liczby niezależne od siebie, o dużej równomierności rozkładu, czyli z możliwie małą korelacją pomiędzy kolejno generowanymi liczbami.

- nieczułość na warunek początkowy

Okres i własności losowe nie powinny zależeć od wyboru warunku początkowego.

- duża okresowość

Przy dobrych generatorach, okresowość przewyższa liczbę niezbędnych w symulacji wyników i jest zbliżona do zakresu liczb całkowitych danego komputera. Dla 32-bitowych komputerów okres powtarzalności powinien być bliski liczbie $2^{31}-1$, gdyż zakres liczb całkowitych komputerów 32-bitowych mieści się w przedziale $[-2^{31}, 2^{31}-1]$. Ważne jest, aby generator w krótkim czasie stworzył dane liczbowe do pozyskania wysokiej jakości statystycznej. Ponadto generator jest zobligowany, aby okres i własności losowe nie zależały od wyboru warunku początkowego [5-6].

Środowisko programistyczne - GEANT4

Jako otwarte środowisko programistyczne służy symulowaniu procesów z zakresu fizyki jądrowej. Początkowym przeznaczeniem była symulacja zjawisk zachodzących przy wysokich energiach, które później poszerzono również do innych dziedzin fizyki cząstek elementarnych oraz medycyny nuklearnej [7].

Geant4 opiera się na języku programowania C++. Dzięki Geant4 zyskujemy m.in. możliwość charakterystyki cząstek pierwotnych, własności detektorów oraz oddziaływań fizycznych. Na podstawie wyznaczonych rozkładów prawdopodobieństwa losowany jest wynik pojedynczego zdarzenia (typ oddziaływania, energia cząstek wtórnych, kąt emisji itd.). Procesy oddziaływań fizycznych, jakie możemy symulować dzięki oprogramowaniu Geant4 to: promieniowanie hamowania, jonizacja, wielokrotne rozpraszanie dla

elektronów i pozytonów, anihilacja pozytonów, efekt fotoelektryczny, rozpraszanie Comptona, tworzenie par elektron-pozyton, konwersja gamma, rozpraszanie Rayleigha a także inne procesy o mniejszym znaczeniu (efekt Augera) [8].

Geant4 obejmuje narzędzia w postaci zestawu generatorów liczb pseudolosowych, stabelaryzowanych jednostek i stałych fizycznych, zapamiętywania danych o zdarzeniach i śladach cząstek oraz interfejsów użytkownika umożliwiających jego komunikację z programem symulacyjnym. Ze względu na złożoność aplikacji Geant4, dokonano podziału na mniejsze logiczne części, które są od siebie niezależne i mogą być równolegle rozwijane. Należy jednak pamiętać, że moduły muszą być ze sobą skomunikowane. Dzięki temu możliwa jest ich prosta adaptacja do potrzeb użytkownika, jak również implementacja kolejnych modeli fizycznych [9-11].

W kodzie GEANT4 niezbędna jest implementacja podstawowych klas tj. `G4VUserDetectorConstruction`, `G4VUserPhysicsList` oraz `G4VUserPrimaryGenerator`, w których znajduje się opis konstrukcyjny i geometryczny wszystkich elementów, przegląd dostępnych zjawisk fizycznych oraz baza informacji o cząstkach pierwotnych.

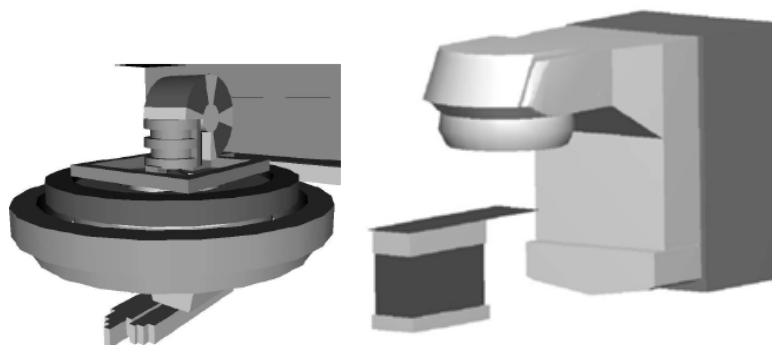
Dodatkowo klasy zawarte są w kategoriach. Do jednych z najważniejszych kategorii zaliczamy tzw. *global* (ogólna), *materials* (materiały), *particles* (cząstki) oraz *geometry* (geometria). Pierwsza z nich stanowi, wspomniany opis systemu jednostek. *Materials* i *particles* jak wskazuje nazwa to kategorie zapewniające charakterystykę właściwości fizycznych materiałów i cząstek oddziałujących z materią. Strukturę geometryczną, warunki propagacji oraz definicję pola elektromagnetycznego cechuje kategoria *geometry*.

Metody Monte Carlo w środowisku Geant4 odwołują się zarówno do danych empirycznych (przekroje czynne), jak i do znanych modeli teoretycznych. Przykładowo, do symulacji oddziaływania fotonów z materią, wykorzystuje się bazę danych G4EMLOW3.0 a do emisji fotonów przez jądra wzbudzone – `PhotonEvaporation2.0`.

Geant4 cechują dwie niezależne reprezentacje geometryczne tj. CSG (ang. *Constructive Solid Geometry*) i BREP (ang. *Boundary REPresented*). Obiekty definiowane jako CSG nie wymagają złożonych parametrów do opisu kształtu i rozmiaru. Tak zdefiniowana geometria jest łatwa w użyciu jednak mało wydajna przy konstrukcjach o większej liczbie szczegółów, tworzą ją m.in. prostopadłościany, stożki, kule. Za wizualizację bardziej złożonych konstrukcji odpowiada reprezentacja BREP, która determinuje obiekty poprzez opis ich powierzchni za pośrednictwem wycinków płasz

Monte Carlo w radioterapii

Do realizacji celów radioterapii powszechnie wykorzystuje się akceleratory liniowe. Chcąc znaleźć odniesienie do modelowania komputerowego, program symulacyjny powinien precyzyjnie odzwierciedlać konstrukcję akceleratora medycznego oraz najważniejsze części jego głowicy, co obrazuje Ryc. 2. Komponenty głowicy (widoczne po prawej) mogą być skonstruowane w oparciu o reprezentacje geometryczne – CSG i BREP. Spośród metod symulacyjnych, jedynie Monte Carlo jest wyspecjalizowana do zaimplementowania wszystkich oddziaływań cząstek, jakie zachodzą w niejednorodnym ośrodku, czyli ludzkim ciele. Dzięki odpowiednim klasom Geant4, możliwe jest zobrazowanie trajektorii cząstek uprzednio zdefiniowanych obiektów [7].

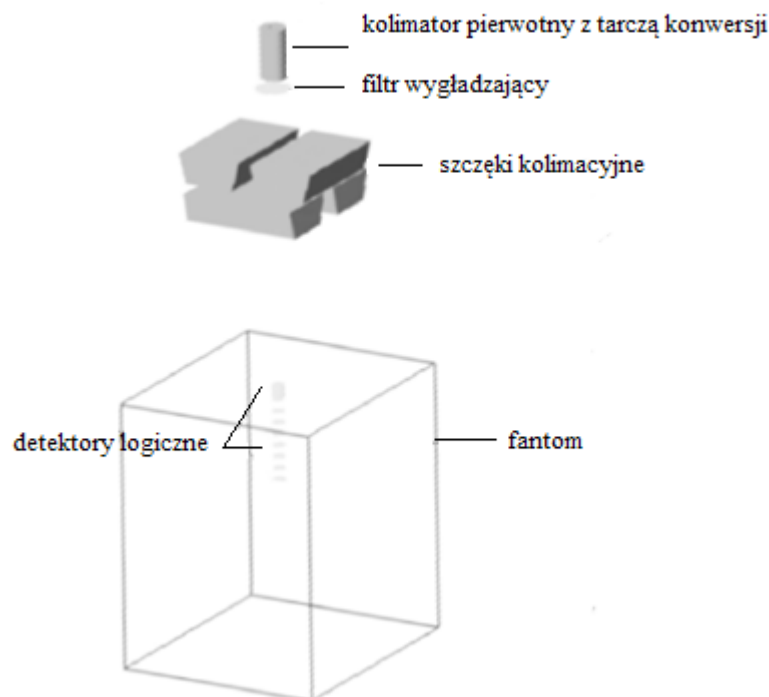


Ryc. 2. Wizualizacja symulowanego akceleratora medycznego Clinac 2300 oraz elementów jego głowicy, stworzona w środowisku GEANT4 [7].

W radioterapii problemem możliwym do rozwiązania na gruncie symulacji są m.in rozkłady dawek, skład wiązki promieniowania oraz kierunek propagacji poza polem promieniowania i wiązką pierwotną. Ważnym zastosowaniem są wspomniane wcześniej widma energetyczne. (zdanie przeniesione z rozdziału Podstawy Monte Carlo)

Widma energetyczne mogą służyć celom teleradioterapii przez wzgląd na współczynnik $s_{w,air}$ (ang. *stopping-power ratio water to air*), niezbędny do wyznaczenia dawki pochłoniętej w wodzie, który opisuje krotność strat energii elektronów w wodzie w stosunku do powietrza [11-13]. Widma energetyczne to również znaczący punkt przy konstrukcji akceleratorów oraz systemów planujących leczenie, które w oparciu o widma tworzą kliniczny model wiązki. Zyskując informacje o rozkładzie cząstek względem różnych warunków napromieniania możliwa staje się poprawa funkcjonalności głowy a dla fizyków medycznych lepsza optymalizacja planów leczenia. Rozwój technik eksperymentalnych i obliczeniowych, wciąż nie przynosi rozwiązań w kwestii wyznaczania widm energetycznych w liniowych akceleratorach medycznych. Pomimo wielu prac traktujących o widmach energetycznych dla wiązek fotonowych i elektronowych w powietrzu, brakuje informacji na temat widm wyznaczanych w wodzie [14-17].

Alternatywnym rozwiązaniem stają się symulacje Monte Carlo, które w oparciu o eksperymentalne przekroje czynne prowadzą do pozyskania wysokiej jakości wyników. Metoda symulacyjna pozwala na wyznaczenie widm wiązek terapeutycznych w dowolnym ośrodku. Przed przystąpieniem do wyznaczenia widm, niezbędna jest jednak zgodność pomiędzy rozkładem dawki wyznaczonym eksperymentalnie i symulacyjnie. Dysponując aparaturą dozymetryczną mierzone są krzywe i profile dawek, które w następnej kolejności porównuje się do krzywych i profili uzyskanych metodą Monte Carlo. Krzywe ilustrują rozkłady dawek wzdłuż osi wiązek promieniowania natomiast profile - rozkłady mocy dawek w poprzek wiązki promieniowania. Zgodność rozkładów dawek potwierdza fakt optymalizacji programu przeznaczonego do symulacji, co przesądza o jego użyteczności do wyznaczania widm energetycznych rozważanej wiązki terapeutycznej [17-19]. Na Ryc. 3 przedstawiono wizualizację symulowanego układu celem obliczania widm energetycznych dla wiązki promieniowania fotonowego 6 MV.



Ryc. 3. Wizualizacja głównych części głowy akceleratora Clinac 2300 dla wiązki fotonowej, fantomu wodnego i układu detektorów logicznych. Detektor logiczny stanowi objętość określoną w fantomie wodnym, która rejestruje energię zdeponowaną w nim przez cząstki [17].

Brak jednoznacznego sposobu na dokładne wyznaczenie niepewności pomiarowych świadczy o szacunkowym charakterze wyników symulacji. Ważne jest porównanie wyników symulacji z danymi doświadczalnymi.

Podsumowanie

Metoda Monte Carlo pozwala na modelowanie dowolnych procesów, których przebieg zależy od czynników losowych. Sztuczny model stochastyczny czyni metodę Monte Carlo uniwersalną do prowadzenia obliczeń na potrzeby wielu dyscyplin, w tym radioterapii.

Ogólnodostępna wersja oprogramowania Geant4, poza plikami źródłowymi udostępnia szczegółowe informacje m.in. na temat struktur bibliotek, znaczeniu poszczególnych klas jak również modeli fizycznych. Dzięki możliwości profilowania złożonych geometrii, symulacje Monte Carlo są wyspecjalizowane do realizacji wymogów nowych generacji akceleratorów.

Metodę Monte Carlo wyróżnia zdolność modelowania wszystkich znanych obecnie zjawisk wchodzących w zakres fizyki jądrowej i cząstek elementarnych i wykorzystanie ich na potrzeby radioterapii. W prostej formie użytkownik może zastąpić złożone rozwiązania analityczne. Rosnąca moc obliczeniowa komputerów zdecydowanie skraca czas oczekiwania na wynik i umożliwia równoległy przebieg pomiarów dozymetrycznych w radioterapii z obliczeniami Monte Carlo.

Wady opisanej metody to szacunkowy charakter obliczeń. Eksperymenty mogą być prowadzone dla skończonej liczby prób. Nie zawsze złożoność programistyczna zachęca do eksploatacji metody.

Symulacje komputerowe są zbieżne w odniesieniu do metod eksperymentalnych a ponadto w kontekście teleradioterapii pozwalają przewidzieć bardzo mało prawdopodobne zjawiska i przynieść informacje o szeregu oddziaływań nie tylko w trakcie napromieniania pacjenta. Metoda Monte Carlo jest więc wysoce użyteczna w radioterapii.

Konflikt interesu / Conflict of interest

Nie występuje / None.

Etyka / Ethics

Treści przedstawione w artykule są zgodne z zasadami Deklaracji Helsińskiej, dyrektywami EU oraz ujednoliconymi wymaganiami dla czasopism biomedycznych.

Piśmiennictwo/ References

- [1] Metropolis N, Ulam S, The Monte Carlo method. J. Amer. Statistical Assoc. 1949, 44, No 247:335– 341.
- [2] Mitrenga D, Metodyczne podstawy symulacji stochastycznej Monte Carlo. Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach.
- [3] Rolski T, Symulacje stochastyczne i teoria Monte Carlo. Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski. Wrocław. 2013.
- [4] Niemirowicz W, Symulacje stochastyczne i metody Monte Carlo. Matematyka stosowana. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski. Warszawa. 2013.
- [5] Sobol I, M. Metoda Monte Carlo. Wyd. Moskwa. Nauka. 2017, str.7-22..
- [6] Kalos MH, Whitlock PA, Monte Carlo Methods. 2nd Edition. 2008. ISBN: 978-3-527-40760-6, 1-5.
- [7] Konefał A, Symulacje metodą Monte Carlo za pomocą oprogramowania GEANT4. Katowice. Instytut Fizyki UŚ. Postępy Fizyki. 2006, t. 57 (6).
- [8] <https://geant4.web.cern.ch/>; (dostęp: 23.07.2018).
- [9] Agostinelli S, et al. „Geant4 - a simulation toolkit”, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 2003, sec. A, vol. 506, is. 3, 250-303.
- [10] Rahim K, Effect of each component of a LINAC therapy head on neutron and photon spectra. *Appl. Radiat. Isot.* 2018, Vol. 139, 40-45.

- [11] Sardari D, Maleki R, Samavat H, Esmaeeli A, Measurement of depth-dose of linear accelerator and simulation by use of Geant4 computer code. Rep. Pract. Oncol. Radiother. 2010, 20;15(3). 64-8.
- [12] Tome WA, Palta JR, On the calculations of mean restricted collision stopping powers, Medical Physics and Engineering. 1998, Vol. 4, No. 4, 171-182.
- [13] Andreo P, Brahme A, Stopping power data for high-energy photon beams, Physics in Medicine and Biology. 1986, Vol. 31, 839-858.
- [14] Pietrzak R, Modelowanie terapeutycznych wiązek promieniowania za pomocą metody Monte Carlo. Katowice. Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii UŚ. 2017, str. 31-46.
- [15] Bakoniak M, Wyznaczanie widm energetycznych wiązek terapeutycznych liniowych akceleratorów medycznych. Katowice. Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii UŚ 2017, str.16-19.
- [16] Demarco JJ, Chetty IJ, Solber TD, A Monte Carlo tutorial and the application for radiotherapy treatment planning. Medical Dosimetry. 2002, Vol. 27, No. 1, 43–50.
- [17] Konefał A, Udział fizyki jądrowej w rozwiązywaniu problemów współczesnej radioterapii. Wyd. UŚ. Katowice. 2011, Str. 31-39
- [18] Konefał A, Bakoniak M, Orlef A, et al. Energy spectra in water for the 6 MV X-ray therapeutic beam generated by Clinac-2300 linac. Radiation Measurements. 2015, 72. 12-22.
- [19] Williams ML, Sajo E, Deterministic calculations of photon spectra for clinical accelerator targets. Med Phys. 2002, 29 (6),1019-28.